ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1983

DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : *Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

SUJET N° 1

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$F_n(x) = \frac{\cos^{2n} x \cdot \sin(2n+1)x}{\sin x},$$

et l'on prolonge par continuité $F_n(x)$ en 0. Le but de l'exercice est le calcul de $I_n = \int_0^{\pi/2} F_n(x)\,dx$.

1) Calculer directement I_0 et I_1.

2) En posant $z = e^{2ix}$, mettre $F_n(x)$ sous la forme $u_n(z) \cdot P_n(z)$, où

$$P_n(z) = (1+z)^{2n}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{2n}),$$

et $u_n(z)$ est une certaine suite très simple que l'on déterminera.

3) On pose $P_n(z) = \sum_{k=0}^{4n} a_k z^k$.

Après avoir montré que $a_k = a_{4n-k}$, donner une expression de $F_n(x)$ utilisant z et ces coefficients a_k (que l'on ne demande pas de calculer).

En déduire que $I_n = a_{2n}\, b_n$, où (b_n) est une suite que l'on calculera.

4) Calculer explicitement a_{2n} et donner alors la valeur de I_n.

5) Essayer d'imaginer une autre méthode pour le calcul de I_n.

.../...

SUJET N° 2

Soit f la fonction qui, à x réel, associe $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh} x}$

1) a) Montrer que l'on peut la prolonger par continuité là où elle n'est pas définie.

b) Déterminer avec une erreur $< 5 \cdot 10^{-4}$ les cordonnées de ses extremums.

c) Donner sa représentation graphique.

2) Démontrer la convergence de l'intégrale généralisée $I = \int_0^{\infty} f(x)\, dx$.

3) Calculer, pour tout $a > 0$, la valeur de $K(a) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax}\, dx$.

4) En mettant f sous la forme $2x^2 e^{-x} \left(1 - e^{-2x}\right)^{-1}$, et en utilisant

$$\frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} = \sum_{k=0}^{n} t^k \quad , \text{ si } t \neq 1,$$

montrer que

$$I = 4\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^3}\right) + u_n,$$

où (u_n) est une suite sous forme intégrale, que l'on précisera, et qui a 0 pour limite.

5) En déduire une formule très simple exprimant $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ en fonction de I.

SUJET N° 3

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (f_n) de fonctions de la variable réelle x par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

1) Pour quelles raisons peut-on se restreindre à l'intervalle $]0, \pi[$ pour étudier $f_n(x)$?

2) Mettre $f_n'(x)$, la dérivée de $f_n(x)$, sous une forme très simple, sans utilisation du signe Σ.

3) En déduire la valeur a_n de la plus petite racine de $f_n'(x) = 0$ dans $]0, \pi[$.

4) Montrer alors que $b_n = f_n(a_n)$ a pour limite $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$ quand $n \to \infty$.

5) Evaluer à 3 décimales cette intégrale I, en expliquant la méthode suivie.

.../...

SUJET N° 4

On considère la fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, et l'on appelle (Γ) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable à tout ordre n en tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer plus particulièrement $f^{(2k+1)}(0)$ et $f^{(2k)}(0)$.

2) Montrer que $f'(x)$ s'annule en une infinité de valeurs de x, pour lesquelles on a : $\sin^2 x = \frac{x^2}{1+x^2}$.

En déduire que les points de (Γ) à tangente horizontale se trouvent aussi sur une certaine courbe (C) d'équation $P(x,y) = 0$, où P est un polynôme du 4ème degré que l'on écrira.

3) Montrer de même qu'en tout x tel que $f''(x) = 0$, on peut exprimer $\sin^2 x$ comme une fraction rationnelle de x que l'on calculera.

4) Etant donnée une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur (u, v, w) afin que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à cette ellipse.

5) Déduire de (3) et (4) que les tangentes aux points d'inflexion de (Γ) sont toutes tangentes à une certaine ellipse que l'on précisera par son équation.

SUJET N° 5

Soit $f_n(x)$ la suite de fonctions de la variable réelle, définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k$, $n \geqslant 1$

1) Montrer que, pour $x \neq 1$, $f_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme $P_n(x) \cdot (1-x)^{-2}$, où P_n est un certain polynôme de degré $n+2$, à 3 termes, que l'on calculera.

[N.B. : Cette question préliminaire pourra être utilisée par la suite, mais pas nécessairement].

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une seule racine dans $]0, 1[$, que l'on appellera u_n.

3) La suite (u_n) est-elle monotone ?

4) Prouver que (u_n) admet une certaine limite ℓ que l'on déterminera.

5) Par une méthode numérique que l'on précisera, calculer u_2, u_3, u_4, et u_5.

»»»»»■«««««